EPREUVE DE MATHEMATIQUES (I)

Durée : 3 heures

Les deux parties sont indépendantes, et elles doivent être traitées toutes les deux.

- I -

On désigne par S l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions réelles de la variable réelle développables en série entière sur $\mathbb{R}$ et par F le sous-espace vectoriel de S engendré par le système (f_1, f_2, f_3, f_4) des fonctions définies par :

$$f_1 : x \mapsto \operatorname{ch} x \; ; \quad f_2 : x \mapsto \operatorname{sh} x \; ; \quad f_3 : x \mapsto x \operatorname{ch} x \; ; \quad f_4 : x \mapsto x \operatorname{sh} x$$

1) Soit D l'application de F dans S associant à toute fonction f de F sa fonction dérivée f' : Df = f'.

a) Vérifier que D définit un endomorphisme de F.

b) Ecrire la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont les coefficients $a_{ij} (i = 1,4 \; et \; j = 1,4)$ sont définis par :

$$\mathrm{D} f_j = \sum_{i=1}^{4} a_{ij} f_i$$

c) Calculer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, A^{2p} et A^{2p+1}

2) Soit la fonction $w : x \mapsto w(x)$ où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $w(x)$ est le déterminant

$$w(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & f_4(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) & f'_3(x) & f'_4(x) \\ f''_1(x) & f''_2(x) & f''_3(x) & f''_4(x) \\ f'''_1(x) & f'''_2(x) & f'''_3(x) & f'''_4(x) \end{vmatrix}$$

a) Utilisant les matrices A, A^2, A^3 calculer $w(0)$.

b) Montrer alors que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de F, A définissant l'endomorphisme D dans cette base.

3) λ désigne un réel quelconque.

a) Expliciter pour tout x réel la matrice : $xA^2 - \lambda A - xI$ (I étant la matrice unité d'ordre 4)

b) Soit T_λ l'application de F dans S associant à toute fonction f de F la fonction

$$T_\lambda(\mathrm{f}) : x \mapsto x\,\mathrm{f}''(x) - \lambda\,\mathrm{f}'(x) - x\,\mathrm{f}(x)$$

Déduire du calcul précédent que T_λ définit un endomorphisme de F, et écrire la matrice B_λ définissant T_λ dans la base (f_1, f_2, f_3, f_4) de F.

4) a) Déterminer Ker T_λ et Im T_λ pour λ réel.

b) En déduire la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'équation $x\,\mathrm{f}'' - \lambda\,\mathrm{f}' - x\,\mathrm{f} = 0$ pour les deux valeurs suivantes de λ : $\lambda = 0$ et $\lambda = 2$.

- II -

1) On considère la série entière réelle de terme général $a_n x^n$, de rayon de convergence R non nul et de somme la fonction f.
k étant un paramètre réel donné, on définit la fonction ϕ à l'aide de la fonction f et de ses deux premières dérivées par :

$$\phi : x \mapsto x\,f''(x) + k\,f'(x) + x\,f(x)$$

Préciser le rayon de convergence du développement en série entière de la fonction ϕ et calculer les coefficients b_0, b_1, b_2, et b_{n-1} de ce développement en fonction du paramètre k et des coefficients a_n de la série initiale. Expliciter en outre b_{2p} et b_{2p-1}.

2) Dans la suite du problème, on se propose de résoudre l'équation différentielle suivante, notée E_k, en déterminant l'ensemble des fonctions f, sommes de série entière de rayon de convergence non nul, pour lesquelles ϕ est la fonction nulle.

$$(E_k)\quad xy'' + ky' + xy = 0$$

a) Démontrer que pour tout $n \geq 2$ les coefficients a_n et a_{n-2} vérifient une relation de récurrence du type

$$\alpha(n+k-1)a_n + a_{n-2} = 0 \qquad \text{où l'on déterminera } \alpha \text{ en fonction de } n.$$

Ecrire cette relation pour n pair puis pour n impair.

b) Lorsqu'il existe des solutions de (E_k) sous la forme $\sum_{p=p_0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p}$ ou $\sum_{p=p_1}^{+\infty} a_{2p+1} x^{2p+1}$, montrer sans calcul des coefficients a_{2p} ou a_{2p+1} que ces séries convergent absolument $\forall x \in \mathbb{R}$ et en déduire leur rayon de convergence.

c) Dans le cas particulier où le réel k est nul, calculer $\dfrac{a_{2p}}{a_0}$ et $\dfrac{a_{2p+1}}{a_1}$ et en déduire l'expression de f sous la forme

$$f(x) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_{2p}}{a_0} x^{2p} + a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_{2p+1}}{a_1} x^{2p+1}$$

d) Intégrer par la méthode habituelle l'équation $y'' + y = 0$ et confronter les résultats obtenus.

3) a) Montrer que le coefficient a_{2p} peut être calculé en fonction du coefficient a_0 pour tout $p \geq 1$ lorsque k n'est pas un entier impair négatif.

b) Procéder au calcul effectif du rapport $\dfrac{a_{2p}}{a_0}$ lorsque $k = 2$.

c) Même question pour $k = -2$.

d) i) Que peut-on dire du coefficient a_1 lorsque le réel k n'est pas nul ?

ii) Que dire en outre du coefficient a_{2p+1} lorsque k non nul n'est pas un entier pair négatif ?

e) i) Pour $k = -2$ montrer que le coefficient a_3 est indéterminé.

ii) Calculer le rapport $\frac{a_{2p-1}}{a_3}$ pour tout entier $p \geq 2$ pour $k = -2$.

f) Montrer que la solution générale de l'équation différentielle (E_{-2}) : $xy'' - 2y' + xy = 0$ peut être mise sous la forme :

$$y = \lambda \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p-1}(2p-1)\frac{x^{2p}}{(2p)!} + \mu \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p-1} 2p \frac{x^{2p-1}}{(2p+1)!}$$

en précisant λ et μ en fonction de a_0 et a_1.

4) a) Développer en série entière la fonction définie par :

$$f_1 : x \mapsto f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \forall x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b) Montrer qu'il est possible, en utilisant 3)b) de terminer l'intégration de (E_2) en effectuant le changement de fonction défini par $y(x) = z(x).f_1(x)$ et donner la solution générale.

c) Existe-t-il une solution de (E_2) continue sur $\mathbb{R}$?